MA’RUZA

BIRINCHI TARTIBLI DIFFERENSIAL TENGLAMALAR

Mavzuning rejasi

1. Birinchi tartibli bir jinsli differensial tenglamalar.
2. Bir jinsli tenlamaga keltiriladigan differensial tenlamalar.
3. Birinchi tartibli chiziqli differensial tenglama.

Tayanch so’z va iboralar: bir jinsli differensial tenglama, bir jinsli funksiya, n o’lchovli bir jinsli funksiya, birinchi tartibli chiziqli differensial tenglama, hosilasiga nisbatan chiziqli, differensial tenglamani tartibi, umumiy yechimi, umumiy integrali.

1. Birinchi tartibli bir jinsli differensial tenglama

1-ta’rif: Agar λ ning har qanday qiymatida $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n (x, y)$ (1) ayniyat to’g’ri bo’lsa, $f(x, y)$ funksiya x va y o’zgaruvchilarga nisbatan n o’lchovli bir jinsli funksiya deyiladi.

1-misol: $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$ funksiya bir o’lchovli bir jinsli funksiyadir, chunki $f(\lambda x, \lambda y) = \sqrt[3]{(\lambda x)^3 + (\lambda y)^3} = \lambda \cdot \sqrt[3]{x^3 + y^3} = \lambda \cdot f(x, y)$ bo’ladi.

2-misol: $f(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2}{xy}$ funksiya nol o’lchovli bir jinsli funksiyadir, chunki $f(\lambda x, \lambda y) = \dfrac{(\lambda x)^2 - (\lambda y)^2}{(\lambda x)(\lambda y)} = \lambda^0 \cdot \dfrac{x^2 - y^2}{xy} = \lambda^0 f(x, y)$ bo’ladi.

2-ta’rif: Agar birinchi tartibli $\dfrac{dy}{dx} = f(x, y)$ (2) tenglamada $f(x, y)$ funksiya x va y ga nisbatan nol o’lchovli bir jinsli funksiya bo’lsa, (2) tenglama x va y o’zgaruvchilarga nisbatan bir jinsli tenglama deyiladi.

2. Bir jinsli tenglamani yechish

Funksiya bir jinsli bo’lishining shartiga ko’ra $f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y)$. Bu ayniyatda $\lambda = \dfrac{1}{x}$ deb olsak, $f(x, y) = f\left(1, \dfrac{y}{x}\right)$, ya’ni nol o’lchovli bir jinsli funksiya faqat argumentlar nisbatigagina bog’liq. Bu holda (2) tenglama

$$\frac{dy}{dx} = f\left(1, \frac{y}{x}\right) \qquad (2`)$$

ko’rinishida bo’ladi. O’zgaruvchilarini almashtiramiz.

$$u = \frac{y}{x} \text{ yoki } y = u \cdot x. \qquad (3)$$

U holda $\dfrac{dy}{dx} = u + \dfrac{du}{dx} x$. Hosilaning ifodasini (2`) ga qo’ysak, o’zgaruvchilari ajralgan $u + x\dfrac{du}{dx} = f(1, u)$ tenglama hosil bo’ladi. O’zgaruvchilarini ajratib yozsak $x\dfrac{du}{dx} = f(1, u) - u$ yoki $\dfrac{du}{f(1, u)} = \dfrac{dx}{x}$ buni integrallasak:

$$\int \frac{du}{f(1,u)-u} = \int \frac{dx}{x} + C \tag{4}$$

hosil qilamiz. Integraldan keyin u o'rniga $\frac{y}{x}$ nisbatni (2`) tenglamaning umumiy integrali hosil bo'ladi.

3-misol: $\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{x^2 - y^2}$ tenglamani umumiy integralini toping.

Yechish: Tenglama bir jinsli. Tenglamani $\frac{y}{x} = u$ almashtirish bilan yechamiz. Bu holda $y = u \cdot x$, $\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$, $u + x\frac{du}{dx} = \frac{u}{1-u^2}$, $x\frac{du}{dx} = \frac{u^3}{1-u^2}$. O'zgaruvchilarni ajratib, $\frac{(1-u^2)du}{u^3} = \frac{dx}{x}$, $\left(\frac{1}{u^3} - \frac{1}{u}\right)du = \frac{dx}{x}$ ni hosil qilamiz: buni integrallab $-\frac{1}{2u^2} - \ln|u| = \ln|x| + \ln|C|$ yoki $-\frac{1}{2u^2} = \ln|Cu \cdot x|$.

u ning o'rniga $\frac{y}{x}$ ni qo'ysak, berilgan tenglamaning umumiy integrali hosil bo'ladi: $\frac{x^2}{2y^2} = \ln|Cy|$ yoki $x = y\sqrt{2\ln|Cy|}$ ni topamiz.

3. Bir jinsli tenglamaga keltiriladigan tenglamalar

Ushbu

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1} \tag{5}$$

ko'rinishdagi tenglamalarga bir jinsli tenglamalarga keltiriladigan tenglamalar deyiladi. Agar $c = 0$, $c_1 = 0$ bo'lsa, (5) tenglama bir jinsli bo'ladi. Endi $c_1 \neq 0$, $c_2 \neq 0$ yoki bittasi noldan farqli bo'lgan holni qaraymiz. Bu holda $x = x_1 + h$, $y = y_1 + k$ almashtirib olib, tenglamani

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx_1} \tag{6}$$

ga keltiramiz. x, y va $\frac{dy}{dx}$ larning ifodalarini (5)ga qo'ysak

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax_1 + by_1 + ah + bk + c}{a_1x_1 + b_1y_1 + a_1h + b_1k + c_1} \tag{7}$$

hosil bo'ladi. h va k ni

$$\begin{cases} ah + bk + c = 0, \\ a_1h + b_1k + c_1 = 0 \end{cases} \tag{8}$$

tenglamalar o'rinli bo'ladigan qilib tanlaymiz, ya'ni h va k ni (8) tenglamalar sistemasining yechimi kabi aniqlaymiz. Bu shartlarda (7) tenglama (bunda biz $ab_1 - ab_1 \neq 0$, deb qaraymiz) $\frac{dy}{dx} = \frac{ax_1 + by_1}{a_1x_1 + b_1y_1}$ ko'rinishda bo'lib, bir jinsli tenglamaga aylanadi. Bu tenglamani yechib, (6) so'ngra formulaga muvofiq yana x va y larga o'tsak, (5) tenglamani yechimini hosil qilamiz. Agar $ab_1 - ab_1 = 0$ bo'lsa, (5) ning yechimi quyidagicha topiladi. Bu holda $\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \lambda$, ya'ni $a_1 = \lambda a$, $b_1 = \lambda b$ va demak (5) tenglamani

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(ax+by)c}{\lambda(ax+by)+c_1} \tag{9}$$

ko'rinishga keltirish mumkin bo'lib, bu holda

$$z=ax+by \tag{10}$$

almashtirish yordamida tenglama o'zgaruvchilari ajraladigan tenglamaga keltiriladi. Haqiqatan ham, $\frac{dz}{dx}=a+b\frac{dy}{dx}$ bundan

$$\frac{dz}{dx}=\frac{1}{b}\frac{dz}{dx}-\frac{a}{b}. \tag{11}$$

(9) tenglamaga (10) va (11) ifodalarni qo'yib,

$$\frac{1}{b}\frac{dz}{dx}-\frac{a}{b}=\frac{z+c}{\lambda z+c_1}$$

tenglamani hosil qilamiz, bu esa o'zgaruvchilari ajraladigan tenglamadir. Umuman, (5) tenglamani integrallashda foydalanilgan usul

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right)$$

ko'rinishdagi tenglamani integrallashga ham tatbiq etiladi, bunda $f(.)$- har qanday uzluksiz funksiya bo'la oladi.

4-misol: $\frac{dy}{dx}=\frac{x+y-3}{x-y-1}$ tenglama berilgan. Buni bir jinsli tenglamaga keltirish uchun o'zgaruvchilarini almashtiramiz $x=x_1+h$, $y=y_1+k$. Bu holda,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x_1+y_1+h+k-3}{x_1-y_1+h-k-1},$$

$\begin{cases}h+k-3=0,\\ h-k-1=0\end{cases}$ yechib $h=2,\ k=1$ ekanini topamiz. Natijada bir jinsli

$$\frac{dy_1}{dx_1}=\frac{x_1+y_1}{x_1-y_1}$$

tenglamani hosil qilamiz, buni $\frac{y_1}{x_1}=u$ almashtirish yordamida o'zgaruvchilari ajraladigan tenglamaga ega bo'lamiz $x\frac{du}{dx_1}=\frac{1-u^2}{1-u}$. Hosil bo'lgan tenglamada o'zgaruvchilarni ajratamiz $\frac{1+u^2}{1-u}du=\frac{dx_1}{x_1}$. Buni integrallab, $arctgu=\ln\left|Cx_1\sqrt{1+u^2}\right|$ yoki $Cx_1\sqrt{1+u^2}=e^{arctgu}$ ni topamiz. $u=\frac{y_1}{x_1}$ ekanligidan

$C\sqrt{x_1^2+y_1^2}=e^{arctg\frac{y_1}{x_1}}$ ni hosil qilamiz. Nihoyat, x va y o'zgaruvchilarga o'tib, natijada $C\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2}=e^{arctg\frac{y-1}{x-2}}$ tenglikni hosil qilamiz.

4. Birinchi tartibli chiziqli differensial tenglama

Birinchi tartibli chiziqli differensial tenglama deb noma'lum funksiya va uning hosilasiga nisbatan chiziqli bo'lgan differensial tenglamaga aytiladi. Uning umumiy ko'rinishi

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x) \tag{1}$$

shaklda bo'ladi, bunda $P(x)$ va $Q(x)$lar $x$ning uzluksiz funksiyalaridir. (1) tenglamani yechimimni ning x ikkita noma'lum differensiyallanuvchi funksiyalar ko'paytmasi shaklida izlaymiz.

$$y = u(x) \cdot v(x) \tag{2}$$

Bu funksiyalardan birini ixtiyoriy ma'lum shartni qanoatlantiradigan qilib olish, ikkinchisini esa (1) tenglamaga asosan aniqlaydi. U holda (2) dan

$$\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} \tag{3}$$

y va $\frac{dy}{dx}$ larni (2) va (3)dagi ifodalarini (1) ga qo'yib,

$$u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} + puv = Q$$

yoki

$$u\left(\frac{dv}{dx} + pv\right) + v\frac{du}{dx} = Q \tag{4}$$

ni hosil qilamiz. Bundan v funksiyani tenglama o'rinli bo'ladigan qilib tanlaymiz. Bu differensial tenglamada o'zgaruvchilarni $v$ga nisbatan ajratamiz. $\frac{dv}{v} = -pdx$, buni integrallab $\ln|v| = -\int pdx + C_0$ yoki $v = C_1 e^{-\int pdx}$, bu yerda $C_1 = \pm e^{C_0}$ deb olingan. (4) tenglamaning noldan farqli biror yechimini topish yetarli bo'lgani uchun $v(x)$ funksiya, deb

$$v(x) = e^{-\int pdx} \tag{6}$$

ya'ni $C_1 = 1$ bo'lganda, olishimiz kifoya, bunda $\int pdx$ biror boshlang'ich funksiya $v(x) \neq 0$ bo'lishi o'z-o'zidan ravshan. $v(x)$ning topilgan qiymatini (4) ga qo'yib, $\frac{dv}{dx} + pv = 0$ ekanligini e'tiborga olib,

$v(x)\frac{du}{dx} = Q(x)$ yoki $\frac{du}{dx} = \frac{Q(x)}{v(x)}$ yoki $\frac{du}{dx} = Q(x)e^{\int p(x)dx}$ tenglamani hosil qilamiz. Bundan

$$v = \int Q(x)e^{-\int p(x)dx}dx + C \tag{7}$$

ekanligi kelib chiqadi. u va $v$larni topilgan qiymatlarini (2) ga qo'ysak, natijada

$$y = e^{\int p(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C\right] \tag{8}$$

hosil bo'ladi. Bu (1) tenglamaning umumiy yechimidir. $y|_{x=x_0} = y_0$ bo'ladigan xususiy yechimini topish, ya'ni Koshi masalasini yechsak, $y = e^{\int_{x_0}^{x} p(t)dt}\left[\int_{x_0}^{x} Q(t)e^{\int_{x_0}^{x} p(t)dt}dt + y_0\right]$ bo'ladi.

5-misol: $\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x+1}y = (x+1)$ chiziqli diiferensial tenglamani yeching.

Yechish: $y = uv$ deb faraz qilsak, u holda $\frac{dy}{dx} = u\frac{du}{dx} + v\frac{du}{dx}$ bo'ladi. $\frac{dy}{dx}$ hosila ifodasini dastlabki tenglamaga qo'ysak. $\frac{dy}{dx} + v\frac{du}{dx} - \frac{2}{x+1}uv = (x+1)^3$ yoki $u\left(\frac{dv}{dx} - \frac{2}{x+1}v\right) + v\frac{du}{dx} = (x+1)^3$ ko'rinishda bo'ladi, bundan $v$ni aniqlaymiz va quyidagi $\frac{dv}{dx} - \frac{2}{x+1}v = 0$ yoki $\frac{dv}{v} = \frac{2dx}{x+1}$

tenglamani hosil qilamiz. Uni integrallab, $\ln|v| = 2\ln|x+1| + \ln C \;\Rightarrow\; v = C_0(x+1)^2$ tenglikni hosil qilamiz, bundan $v = \pm C_0(x+1)^2$, $v = C_1(x+1)^2$, $C_1 = 1$ desak, $v = (x+1)^2$ bo'ladi. v ni topilgan ifodasini (8)ga qo'yib u ni topish uchun $(x+1)^2 \dfrac{du}{dx} = (x+1)^3$ yoki $\dfrac{du}{dx} = x+1$ tenglamani hosil qilamiz, bundan $u = \dfrac{(x+1)^2}{2} + C$ ekanligi kelib chiqadi. Demak, berilgan tenglamani umumiy yechimi $y = (x+1)^2\left(\dfrac{(x+1)^2}{2} + C\right)$ yoki $y = \dfrac{1}{2}(x+1)^4 + C(x+1)^2$ bo'ladi. Berilgan tenglamani yechimini (8) formulaga asosan topsak, $P(x) = -\dfrac{2}{x+1}$, $Q(x) = (x+1)^8$ bo'lgani uchun

$$y = e^{-\int\left(-\frac{2}{x+1}\right)dx}\left[\int (x+1)^3 e^{\int\left(-\frac{2}{x+1}\right)dx} dx + C\right]$$

umumiy yechim bo'ladi. Bundan

$$y = e^{2\ln|x+1|}\left[\int (x+1)^3 e^{-2\ln|x+1|} dx + C\right] = (x+1)^2\left[\int (x+1)^3 \frac{1}{(x+1)^2} dx + C\right] = (x+1)^2\left[\int (x+1) dx + C\right] =$$

$$= (x+1)^2\left[\frac{(x+1)^2}{2} + C\right].$$

Demak, berilgan differensial tenglamani umumiy yechimi $y = \dfrac{1}{2}(x+1)^4 + C(x+1)^2$ bo'ladi.